Einheit 1

Aufgabe 1.

(1) $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit der Multiplikation ist eine Gruppe. Finden Sie Untergruppen dieser Gruppen. Geben Sie mindestens drei endliche, zwei abzählbar unendliche und zwei überabzählbare an. (Jeweils verschiedene.)

(2) Dieselbe Aufgabe für die Gruppe der invertierbaren reellen 2×2 Matrizen (mit der Matrix-Multiplikation).

Aufgabe 2. Beantworten Sie die folgenden Fragen:

(Beweisen Sie oder finden Sie ein Gegenbeispiel.)

(1) Sei $(A, +, 0, -)$ eine Gruppe (und daher auch eine Halbgruppe), und $(B, +)$ eine Unterhalbgruppe von $(A, +)$. Kann B durch geeignete Wahl von Operationen $0'$, $-'$ zu einer Gruppe $(B, +, 0', -')$ gemacht werden?
(Analog sind die folgenden Aufgaben zu verstehen, d.h., es geht immer darum, neue Operationen/Konstante hinzuzufügen, niemals neue ELemente.)

(2) Sei $(A, +, 0)$ ein Monoid (und daher auch eine Halbgruppe $(A, +)$), und B eine Unterhalbgruppe von A, die zu einem Monoid gemacht werden kann. Ist B ein Untermonoid?

(3) Sei A eine Gruppe (und daher auch eine Halbgruppe), und B eine Unterhalbgruppe von A die zu einer Gruppe gemacht werden kann. Ist B eine Untergruppe?

(4) Sei A ein 1-Ring und B ein Unterring der zu einem 1-Ring gemacht werden kann. Ist B ein Unter-1-Ring?

Aufgabe 3. In allen Gruppen $(H, \cdot, 1, ^{-1})$ gelten folgende Rechenregeln:

(1) $a^{m+n} = a^m a^n$

(2) $(a^m)^n = a^{mn}$

(3) $(ab)^n = a^n b^n$, sofern $ab = ba$, insbesondere also wenn die binäre Operation kommutativ ist,

für alle $a, b \in H$ und $m, n \in \mathbb{Z}$.

(Hier verwenden wir die folgenden induktive Definition von a^n: a^0 ist das neutrale Element, $a^1 := a$, $a^{n+1} := a^n \cdot a$ für $n \geq 0$, a^{-1} ist invers zu a, $a^{-n} := (a^{-1})^n$ für $n \geq 2$.)

Beweisen Sie diese Aussage. Verwenden Sie vollständige Induktion, und geben Sie explizit an, auf welche Teilmenge von $\mathbb{N}$ Sie das Induktionsprinzip anwenden. Achtung: Gelegentlich sind Fallunterscheidungen wie $n \geq 0$, $n < 0$ notwendig. Geben Sie explizit an, wo und wie Sie das Assoziativgesetz verwenden. (“Wie”’ bedeutet: Geben Sie an, für welche A, B, C Sie $(AB)C = A(BC)$ verwenden.)

Hinweise: 1. Beachten Sie, dass H im allgemeinen nicht kommutativ ist.
2. Können Sie $a^{n+1} = a^n \cdot a$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ beweisen?

ERGÄNZUNG: Rechenregeln für die ganzen Zahlen (wie z.B. Assoziativ- oder Kommutativgesetz) dürfen Sie ohne Beweis verwenden.)

Aufgabe 4. Eine partielle Ordnung ist eine Struktur $(A, \leq)$, die folgende Eigenschaften für alle $a, b, c \in A$ erfüllt:

- $a \leq a$
- $a \leq b$ und $b \leq c$ impliziert $a \leq c$
- $a \leq b$ und $b \leq a$ impliziert $a = b$

Eine partielle Ordnung heißt Verbandsordnung, wenn je zwei Elemente a, b eine größte untere Schranke $\inf(a, b)$ und eine kleinste obere Schranke $\sup(a, b)$ haben.

Zeigen Sie: Es gibt natürliche Zuordnung G von Verbänden (siehe 1.1.23 im Skriptum) zu den Verbandsordnungen; und eine Zuordnung F von Verbandsordnungen zu den Verbänden, so dass die Grundmenge die gleiche bleibt und die Zuordnungen zueinander invers sind, d.h.:

- Wenn $\mathcal{P} = (P, \leq)$ eine Verbandsordnung ist, dann ist $F(\mathcal{P}) := (P, \wedge_{\mathcal{P}}^{F}, \vee_{\mathcal{P}}^{F})$.
- Wenn $\mathcal{V} = (V, \wedge, \vee)$ ein Verband ist, dann ist $G(\mathcal{V}) := (V, \leq_{\mathcal{V}}^{G})$ eine Verbandsordnung.
- $F(G(\mathcal{V})) = \mathcal{V}$ und $G(F(\mathcal{P})) = \mathcal{P}$.

Gib F und G explizit an.

Hinweis: Sie können $a \wedge_{\mathcal{P}}^{F} b := \inf_{\mathcal{P}}(a, b)$ wählen.

Wenn Ihnen das zu einfach ist: Finden Sie eine *weitere* solche Zuordnung.

Aufgabe 5. Betrachten Sie die Algebra $\mathcal{Z}_2 := (\{0, 1\}, m)$ mit der dreistelligen Operation m definiert durch $m(x, y, z) = x - y + z \mod 2$ (Arithmetik modulo 2). Bestimmen Sie: Für welche $n \in \mathbb{N}$ hat $\mathcal{Z}_2$ eine n-stellige Termoperation, die die Gleichung

$$f(x, y, y, \ldots, y) = f(y, x, y, \ldots, y) = f(y, y, x, \ldots, y) = \cdots = f(y, y, y, \ldots, x)$$

erfüllt (für alle x, y in $\{0, 1\}$)?

Aufgabe 6. Betrachten Sie die Algebren $(\mathbb{Z}, \cdot)$ und $(\mathbb{Z}, +)$ mit den üblichen Operationen. Bestimmen Sie alle Homomorphismen (siehe Definition 1.1.29)

(1) von $(\mathbb{Z}, +)$ nach $(\mathbb{Z}, +)$,
(2) von $(\mathbb{Z}, \cdot)$ nach $(\mathbb{Z}, +)$,
(3) von $(\mathbb{Z}, +)$ nach $(\mathbb{Z}, \cdot)$,

Zu welchen Klassen von Algebren (Gruppen, Monoide, Körper etc) gehören $(\mathbb{Z}, +)$ bzw. $(\mathbb{Z}, \cdot)$, gegebenenfalls nach Ergänzung mit geeigneten Operationen (wie in Aufgabe 3).